15/05/19

1)

Πχ: Να σχεδιαστεί η επιφάνεια $2x^2-2xy-2yz-2xz+2y^2+2z^2=1$ (1)
ορίζοντας πολυώνυμο σε 3 μεταβλητές βαθμού 2

$f(x,y,z)=2x^2-2xy-2yz-2xz+2y^2+2z^2$

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ (η γραφική παράσταση αυτή βρίσκεται στον $\mathbb{R}^4$)

$$A=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$f(x,y,z)=2x^2-2xy-2yz-2xz+2y^2+2z^2=(x,y,z)\cdot A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Διαγωνοποιώ τον A:

$$\chi_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -\lambda & 2-\lambda & -1 \\ -\lambda & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}=$$

$$=-\lambda\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}=-\lambda\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}=-\lambda(3-\lambda)^2$$

Άρα $\lambda_1=0,\ \lambda_2=3=\lambda_3$

• $V(0)$: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ -x+2y-z=0 \\ -x-y-2z=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=y \\ z=x \end{cases}$

$V(0)=\langle(1,1,1)\rangle=\langle(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})\rangle$

• $V(3)$: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\{z=-x-y$

$V(3)=\langle(1,0,-1),(0,1,-1)\rangle=\langle(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})\rangle$

$(0,1,-1)-\frac{1}{2}(1,0,-1)=(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})$

$$P=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

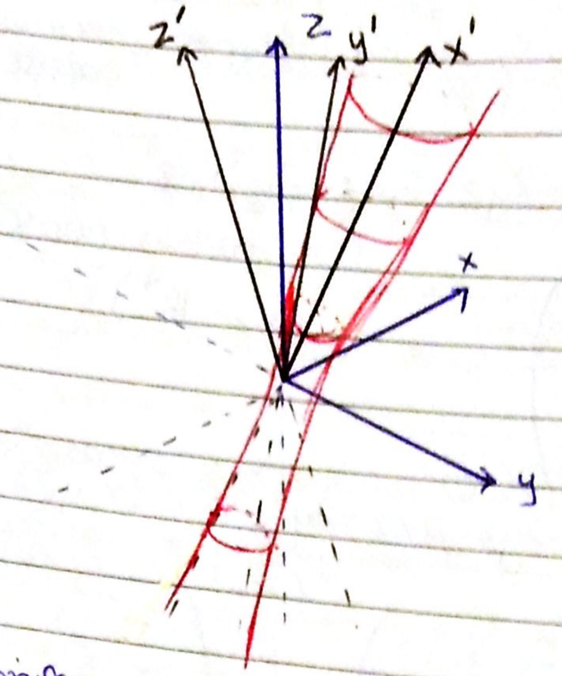
Ορίζω νέους άξονες (νέες συντεταγμένες)

$(x',y',z')=(x,y,z)\,P\Rightarrow$

$x'=\dfrac{x+y+z}{\sqrt{3}},\quad y'=\dfrac{x-z}{\sqrt{2}},$

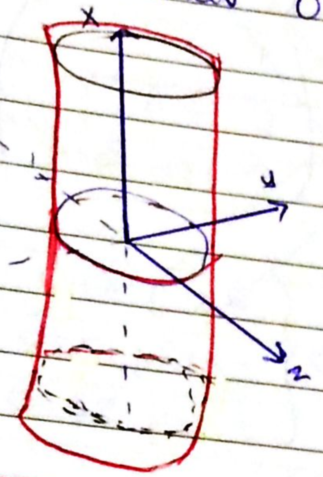
$z'=\dfrac{x-2y+z}{\sqrt{6}}$

Η παράσταση γίνεται: $0(x')^2+3(y')^2+3(z')^2=1$



Βοήθεια για το σχήμα:

Αν ήταν $\underbrace{0x^2+3y^2+3z^2=1}_{\text{έλλειψη}}$



για $x=0 \Rightarrow 3y^2+3z^2=1$ στο επίπεδο yz

για $x=\kappa$, π.χ. 10 : $3z^2+3y^2=1$

ελλειπτικός κύλινδρος

κ' μεταφέρω στους πάνω άξονες ↑

SOS

πχ: 2) Να σχεδιαστεί η : $\underbrace{y^2-3z^2}_{\text{ομογενώς συμπληρώνω}}-4x-6z+6=0$ (1)

(1) $\Rightarrow y^2$, $-3z^2-6z=-3(z^2+2z+1-1)=-3(z+1)^2+3$

$y^2-3(z+1)^2+3-4x+6=0 \Rightarrow y^2-3(z+1)^2-4(x-\frac{9}{4})=0$, $-4x$

κ' θέτω $y'=y$, $x'=x-9/4$, $z'=z+1$

κ' η (1) γίνεται: $(y')^2-3(z')^2-4x'=0$ (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow (y')^2-3(z')^2=4x'$

$4x=y^2-3z^2$

• $x=0 \Rightarrow$ ζητάω την τομή της επιφάνειας με το επίπεδο yz : $0=y^2-3z^2$

άρα 2 ευθείες.

• $z=0 \Rightarrow$ ζητάω την τομή της επιφάνειας με το επίπεδο xy

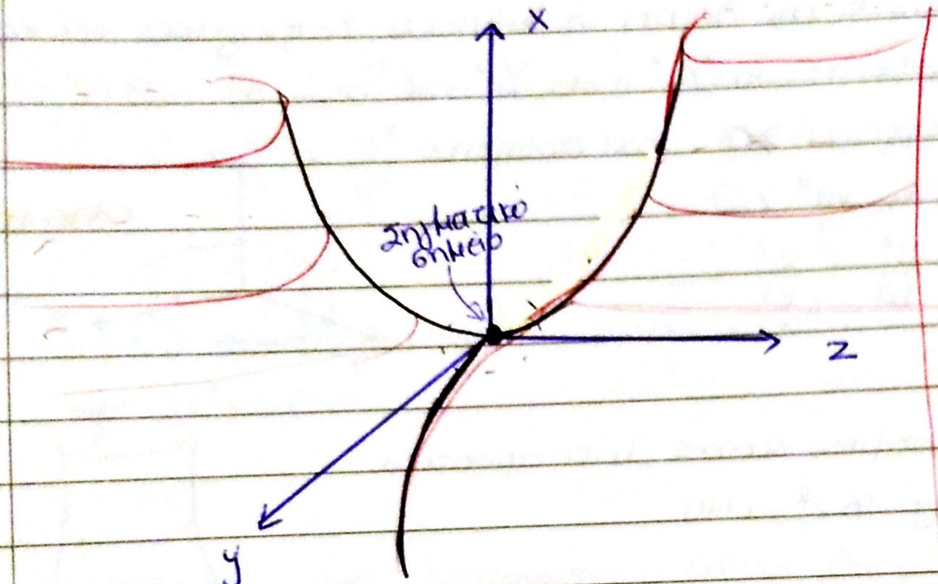
$4x = y^2$ (παραβολή)

• $y=0 \Rightarrow$ ζητάω την τομή της επιφάνειας με το επίπεδο xz

$4x = -3z^2$ (παραβολή)

• $x=5 \Rightarrow$ ζητάω την τομή της επιφάνειας με το επίπεδο yz σε ύψος 5

$20 = y^2 - 3z^2$ (υπερβολή)



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

SOS ➜ Τα σημεία μιας επιφάνειας δευτέρου βαθμού στον $\mathbb{R}^3$ ικανοποιούν μια εξίσωση μορφής:

$$\boxed{ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+\ell z=m}$$

με $a,b,c,d,e,f,g,h,\ell,m \in \mathbb{R}$

Μετασχηματίζω το ομογενές δευτεροβάθμιο μέρος της ως εξής:

$(x',y',z') = (x,y,z)\cdot P \quad \oplus \quad (x,y,z) = (x',y',z')\cdot P^t$

όπου P είναι ο ορθογώνιος πίνακας ο οποίος έχει στήλες τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

Η παράσταση θα γίνει: $\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+\lambda_3(z')^2+gx+hy+\ell z=m$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ είναι οι ιδιοτιμές του A.

Αντικαθιστώ τα x,y,z από τα ίσα τους $\oplus$ ως προς x',y',z'.

Η παράσταση γίνεται: $\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+\lambda_3(z')^2+g'x'+h'y'+\ell'z'=m'$

Δημιουργώ τέλεια τετράγωνα:

• $\lambda_1 (x')^2 + g'x' = \lambda_1 X_1^2 + m_1$

• $\lambda_2 (y')^2 + h'y' = \lambda_2 Y^2 + m_2$

• $\lambda_3 (z')^2 + \ell' z' = \lambda_3 Z_1^2 + m_3$. κ' η παράσταση γίνεται:

$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z_1^2 = m''$

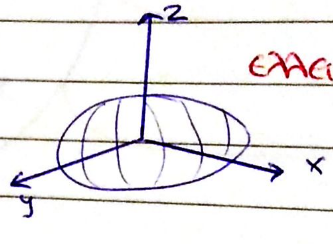
Για να φτάσω στην τελική μορφή χρησιμοποιώ 2 μετασχηματισμούς αξόνων: στροφή κ' μεταφορά στον χώρο.

Πιθανόν, όμως αν λείπει ή λείπουν τετράγωνα να καταλήξω σε μια μορφή: $\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 Y^2 + \ell'' z = m''$

Το m'' θεωρείται ~~≥0~~ όχι αρνητικό

1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, m'' > 0$

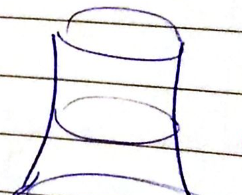
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



ελλειψοειδές

2) Δύο ιδιοτιμές θετικές, μία αρνητική:

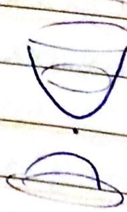
πχ: $4x^2 + 9y - 16z^2 = 144$



μονόχωνο υπερβολοειδές

3) Δύο ιδιοτιμές αρνητικές, μία θετική

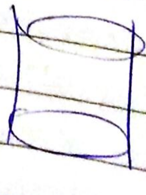
πχ: $-4x^2 - 9y^2 + 16z^2 = 144$



δίχωνο υπερβολοειδές

4) Δύο ιδιοτιμές θετικές, μία μηδέν

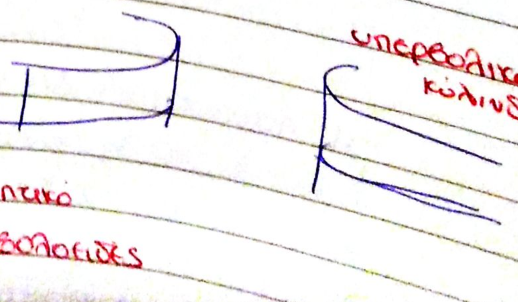
πχ: $9x^2 + 16y^2 = 144$



ελλειπτικός κύλινδρος

5) Μία ιδιοτιμή θετική, μία αρνητική, μία μηδέν

πχ: $25x^2 - 4y^2 = 100$



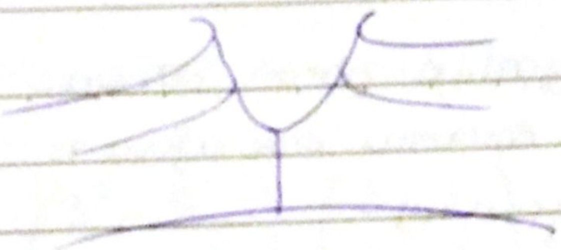
υπερβολικός κύλινδρος

6) $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

ελλειπτικό παραβολοειδές

No. Date

7) $z = \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{b^2}$



Υπερβολικό παραβολοειδές

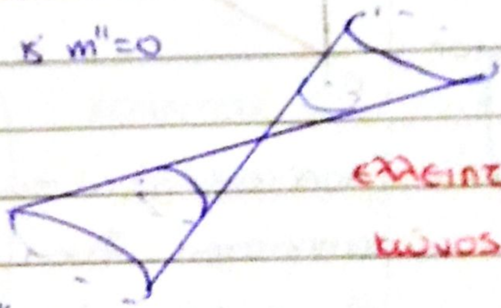
8) Μια ιδιοτιμή θετική, 2 μηδέν

π.χ. $3x^2 = 7$

2 // επίπεδα

9) Δύο ιδιοτιμές θετικές, μία αρνητική & $m'' = 0$

$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$



ελλειπτικός κώνος

10) Δύο ιδιοτιμές θετικές, μία μηδέν & $m'' = 0$

π.χ. $5x^2 + 6y^2 = 0$

μία ευθεία